ORSZÁGOS MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

12. évfolyam

2019.

Fontos tudnivalók

Formai előírások:

1. Kérjük, hogy a dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől **eltérő színű tollal, olvashatóan** javítsa ki.
2. A feladatok mellett található szürke téglalapok közül az elsőben a feladatra adható maximális pontszám van, a javító által adott **pontszám a** mellette levő **téglalapba** kerüljön.
3. **Kifogástalan megoldás** esetén kérjük, hogy a maximális pontszám feltüntetése mellett kipipálással jelezze, hogy az adott gondolati egységet látta, és jónak minősítette.
4. Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy **a hiba jelzése** mellett az egyes **részpontszámokat** is írja rá a dolgozatra. Ha a dolgozat javítását jobban követhetővé teszi, akkor a vizsgázó által elvesztett részpontszámok jelzése is elfogadható. Ne maradjon olyan részlet a megoldásban, amelyről a javítás után nem nyilvánvaló, hogy helyes, hibás vagy fölösleges.
5. A javítás során **alkalmazza az alábbi jelöléseket.**
   - helyes lépés: *kipipálás*
   - elvi hiba: *kétszeres aláhúzás*
   - számolási hiba vagy más, nem elvi hiba: *egyszeres aláhúzás*
   - rossz kiinduló adattal végzett helyes lépés: *szaggatott* vagy *áthúzott kipipálás*
   - hiányos indoklás, hiányos felsorolás vagy más hiány: *hiányjel*
   - nem érthető rész: *kérdőjel* és/vagy *hullámvonal*
6. Az ábrán kívül **ceruzával** írt részeket ne értékelje.

Tartalmi kérések:

1. Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól **eltérő megoldás** születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit, és ennek alapján pontozzon.
2. A pontozási útmutató pontjai tovább **bonthatók, hacsak az útmutató másképp nem rendelkezik**. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
3. Ha a megoldásban **számolási hiba**, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, és a megoldandó probléma lényegében nem változik meg, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
4. **Elvi hibát** követően egy gondolati egységen belül (ezeket az útmutatóban kettős vonal jelzi) a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel – mint kiinduló adattal – helyesen számol tovább a következő gondolati egységekben vagy részkérdésekben, akkor ezekre a részekre kapja meg a maximális pontot, ha a megoldandó probléma lényegében nem változott meg.
5. Ha a megoldási útmutatóban zárójelben szerepel egy **megjegyzés** vagy **mértékegység,** akkor ennek hiánya esetén is teljes értékű a megoldás.

6. Egy feladatra adott többféle megoldási próbálkozás közül **a vizsgázó által megjelölt változat értékelhető**. A javítás során egyértelműen jelezze, hogy melyik változatot értékelte, és melyiket nem.
7. A megoldásokért **jutalompont** (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) **nem adható**.
8. Egy feladatra vagy részfeladatra adott összpontszám **nem lehet negatív**.
9. Az olyan részszámításokért, részlépésekért **nem jár pontlevonás**, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
10. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletszámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
11. Az **ábrák** bizonyító erejű felhasználása (például adatok leolvasása méréssel) nem elfogadható.
12. **Valószínűségek** megadásánál (ha a feladat szövege másképp nem rendelkezik) a százalékban megadott helyes válasz is elfogadható.
13. Ha egy feladat szövege nem ír elő kerekítési kötelezettséget, akkor az útmutatóban megadottól eltérő, **észszerű és helyes kerekítésekkel** kapott rész- és végeredmény is elfogadható.
14. **A vizsgafeladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető.** A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben – feltehetőleg – megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, amelynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani. Ha a vizsgázó nem jelölte meg, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, és a választás ténye a dolgozatból sem derül ki egyértelműen, akkor a nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti utolsó feladat lesz.

I.

1. a)		
A képzett számok első számjegye háromféle (2, 1 vagy 9), második és harmadik számjegye négyféle (2, 0, 1, vagy 9) lehet, ezért az összes lehetőség száma (az előbbiek szorzata, azaz) $3\cdot 4^2=48$.	1 pont	
A megadott számjegyekből $3^2\cdot 2=18$ különböző háromjegyű szám képezhető. (Ez a kedvező esetek száma.)	1 pont	
Így a keresett valószínűség: $\frac{18}{48}=\frac{3}{8}$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

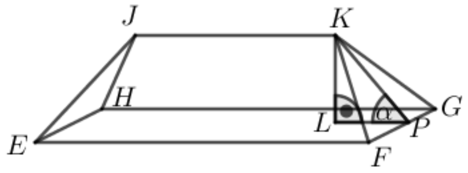
1. b) **első megoldás**		
(Az addíciós tétel alapján:) $\sin x\cdot\cos(2019\cdot\pi)+\cos x\cdot\sin(2019\cdot\pi)=-\frac{1}{2}$	1 pont	
$\sin x\cdot(-1)+\cos x\cdot 0=-\frac{1}{2}$	2 pont	
(Az egyenletet rendezve:) $\sin x=\frac{1}{2}$	1 pont	
Ebből $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $k\in Z$	1 pont	
vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$, $l\in Z$.	1 pont	
A megadott alaphalmazon csak $x=\frac{5\pi}{6}$ megoldás.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

1. b) **második megoldás**		
(A szinusz függvény periodicitása miatt:) $\sin\left(x+1009\cdot 2\cdot\pi+\pi\right)=-\frac{1}{2}$	1 pont	
$\sin\left(x+\pi\right)=-\frac{1}{2}$	1 pont	
(Az egyenletet *x*-re megoldva:) $x+\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$.	1 pont	
Ebből (az egyik gyök) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$.	1 pont	
(Az egyenletet *x*-re megoldva:) $x+\pi=\frac{11\pi}{6}+2l\pi,\ l\in Z$.	1 pont	
Ebből (a másik gyök) $x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi,\ l\in Z$.	1 pont	
A megadott alaphalmazon csak $x=\frac{5\pi}{6}$ megoldás.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

1. b) **harmadik megoldás**		
(Az egyenletet *x*-re megoldva:) $x+2019\cdot\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$.	1 pont	
Ebből (az egyik gyök) $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in Z$.	2 pont	
(Az egyenletet *x*-re megoldva:) $x+2019\cdot\pi=\frac{11\pi}{6}+2l\pi,\ l\in Z$.	1 pont	
Ebből (a másik gyök) $x=\frac{5\pi}{6}+2l\pi,\ l\in Z$.	2 pont	
A megadott alaphalmazon csak $x=\frac{5\pi}{6}$ megoldás.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalens átalakításokra hivatkozással.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

2. a) első megoldás		
Az *ABCDEFGH* téglatest térfogata: $V_{ABCDEFGH} = 16 \cdot 8 \cdot 16 = 2048$ (m^3).	1 pont	
A belső téglatest 12 m hosszú, 4 m széles és 16 m magas, így ennek térfogata: $V_{belső} = 12 \cdot 4 \cdot 16 = 768$ (m^3).	1 pont	
Az oldalfalak térfogata: $V = V_{ABCDEFGH} - V_{belső} = 2048 - 768 = 1280$ (m^3),	1 pont	
melyet az ablakok, ajtók és lőrések miatt 5%-kal csökkentve a keresett térfogat $1280 \cdot 0,95 = 1216$ m^3 lesz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. a) második megoldás		
A hosszabbik oldalfal 16 m hosszú, 16 m magas és 2 m vastag, így ennek térfogata: $V_1 = 16 \cdot 16 \cdot 2 = 512$ (m^3).	1 pont	
A rövidebbik oldalfal 4 m hosszú, 16 m magas és 2 m vastag, így ennek térfogata: $V_2 = 4 \cdot 16 \cdot 2 = 128$ (m^3).	1 pont	
Mivel a hosszabbik és a rövidebbik oldalfalból kettő van, így a teljes térfogat: $V = (512 + 128) \cdot 2 = 1280$ (m^3),	1 pont	
melyet az ablakok, ajtók és lőrések miatt 5%-kal csökkentve a keresett térfogat $1280 \cdot 0,95 = 1216$ m^3 lesz.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

2. b)		
Az *EFGHJK* tető magassága a tető *K* csúcsából az *EFGH* síkra bocsátott merőleges szakasz.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az EFGHJK tető *K* csúcsából induló magasságát és az *FKG* háromszög alaphoz tartozó magasságát behúzva, a tető és az *EFGH* sík hajlásszöge α. 	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
Az *LPK* derékszögű háromszögben: $\text{tg}50° = \frac{5}{LP}$,	1 pont	
ahonnan $LP = \frac{5}{\text{tg}50°}\left(\approx 4{,}2\text{ m}\right)$.	1 pont	
(Mivel a tető szimmetrikus, ezért) $JK = 16 - 2 \cdot \frac{5}{\text{tg}50°} \approx 7{,}61$ m hosszú.	1 pont	*Más, helyesen kerekített érték is elfogadható.*
Összesen:	**5 pont**	

Megjegyzés: Ha a vizsgázó az EFJK trapéz hegyesszögét tekinti 50°-nak, és ennek a trapéznak a magasságát veszi a tető magasságának, akkor a megoldására 0 pontot kapjon.

2. c) első megoldás		
Jelölje *x* a munkálatokban részt vevő tanulók számát. Ekkor: mindhárom munkafolyamatban 0,075*x*; pontosan két munkafolyamatban 0,2*x*; pontosan egy munkafolyamatban 29 tanuló vesz részt.	1 pont	
Ebben az esetben tehát az egyenlet: 0,075*x* + 0,2*x* + 29 = *x*.	1 pont	
Ebből *x* = 40.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

2. c) második megoldás		
Jelölje x a munkálatokban részt vevő tanulók számát. Ha az egyes munkafolyamatokat összegezzük, akkor egyszeresen számoltuk azokat, akik csak egyféle, kétszeresen, akik kétféle, és háromszorosan azokat, akik mindhárom tevékenységet végezték.	1 pont	
Ebben az esetben tehát az egyenlet: $1{,}35x = 29 + 2\cdot 0{,}2x + 3\cdot 0{,}075x$.	1 pont	
Ebből $x = 40$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3. a) első megoldás		
A két logaritmus csak akkor értelmezhető, ha $x > 0$.	1 pont	
(A két oldalt azonos alapra hozva:) $\log_2 x \le \dfrac{\log_2(4x)}{\log_2 \frac{1}{2}}$	1 pont	
(A logaritmus azonossága alapján:) $\log_2 x \le \log_2 (4x)^{-1}$	1 pont	
(A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása vagy kölcsönös egyértelműsége miatt:) $x \le \dfrac{1}{4x}$	1 pont	
Mivel $x > 0$, így az egyenlőtlenséget rendezve: $x^2 \le \dfrac{1}{4}$.	1 pont	
Ebből $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$,	1 pont	
melyet az értelmezési tartománnyal összevetve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. a) második megoldás		
A két logaritmus csak akkor értelmezhető, ha $x > 0$.	1 pont	
(A két oldalt azonos alapra hozva:) $\log_2 x \le \dfrac{\log_2(4x)}{\log_2 \frac{1}{2}}$	1 pont	
(A nevezővel beszorozva:) $-\log_2 x \ge \log_2(4x)$	1 pont	
(A logaritmus azonossága alapján:) $-\log_2 x \ge \log_2 4 + \log_2 x$	1 pont	
(Az egyenlőtlenséget rendezve:) $\log_2 x \le -1 \left(= \log_2 \frac{1}{2}\right)$.	1 pont	
(A logaritmusfüggvény szigorú monotonitása vagy kölcsönös egyértelműsége miatt:) $x \le \frac{1}{2}$,	1 pont	
melyet az értelmezési tartománnyal összevetve az egyenlőtlenség megoldáshalmaza $\left]0; \frac{1}{2}\right]$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) első megoldás		
(Mindkét egyenletet négyzetre emelve:) $\left.\begin{aligned} x - 2\sqrt{xy} + y &= 64 \\ xy &= 1089 \end{aligned}\right\}$	2 pont	
A második egyenletet az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $x + y = 130$, ahonnan $y = 130 - x$.	1 pont	
(A második egyenletből $y = 130 - x$ helyettesítéssel:) $x^2 - 130x + 1089 = 0$.	1 pont	
Ebből $x_1 = 121$ és $x_2 = 9$,	1 pont	
majd visszahelyettesítve $y_1 = 9$ és $y_2 = 121$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel: $x_1 = 121$ és $y_1 = 9$ megoldása az egyenletnek; $x_2 = 9$ és $y_2 = 121$ nem megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

3. b) **második megoldás**		
(A gyökvonás azonosssága alapján:) $\left.\begin{aligned}\sqrt{x}-\sqrt{y}&=8\\ \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}&=33\end{aligned}\right\}$	1 pont	
(Az első egyenletből:) $\sqrt{y}=\sqrt{x}-8$,	1 pont	
(melyet a második egyenletbe helyettesítve:) $x-8\sqrt{x}-33=0$.	1 pont	
Ebből $\left(\sqrt{x}\right)_1=11$ és $\left(\sqrt{x}\right)_2=-3$.	1 pont	
(Az egyenlet gyökei:) $x_1=121$ és $x_2=9$,	1 pont	
majd visszahelyettesítve $y_1=9$ és $y_2=121$.	1 pont	
Ellenőrzés behelyettesítéssel: $x_1=121$ és $y_1=9$ megoldása az egyenletnek; $x_2=9$ és $y_2=121$ nem megoldása az egyenletnek.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

4. a)		
Rögzítsünk úgy egy koordináta-rendszert, hogy az *x*-tengely a sínek szintje, az *y*-tengely pedig a parabolaív szimmetriatengelye legyen.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó bármely más koordináta-rendszerben, vagy koordináta-rendszer nélkül helyesen oldja meg a feladatot.*
Ekkor ennek a parabolának az általános egyenlete: $y=-\frac{1}{2p}x^2+v$.	1 pont	$y=ax^2+c$
Ebben a koordináta-rendszerben a parabolaív első síknegyedbe eső részén ki tudunk jelölni két pontot: $A(3;0)$,	1 pont	
és $B(2;5)$.	1 pont	
(Az előbbi két pontot a parabola általános egyenletébe behelyettesítve megoldandó az alábbi egyenletrendszer:) $\left.\begin{array}{l} 0=-\frac{1}{2p}\cdot 3^2+v \\ 5=-\frac{1}{2p}\cdot 2^2+v \end{array}\right\}$	2 pont	$\left.\begin{array}{l} 0=9a+c \\ 5=4a+c \end{array}\right\}$
Ebből $v=9$ és $p=0,5$.	1 pont	$a=-1$ és $c=9$.
(Mivel v éppen a keresett magasság,) a tartószerkezet a belső ívének középső, legmagasabb pontján 9 méter magas.	1 pont	*(Mivel c éppen a keresett magasság,) a tartószerkezet a belső ívének középső, legmagasabb pontján 9 méter magas.*
Összesen:	**8 pont**	

4. b)		
A keresett térfogat a parabolaszelet területének és az alagút hosszának a szorzata.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A parabola két zérushelye: $x_1 = -4$ és $x_2 = 4$.	1 pont	
A kiszámítandó *T* terület: $T = \int_{-4}^{4} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 8 \right) \mathrm{d}x$.	1 pont	
A határozott integrál értéke: $\left[-\frac{x^3}{6} + 8x \right]_{-4}^{4} =$	1 pont*	
$= \left(-\frac{64}{6} + 32 \right) - \left(\frac{64}{6} - 32 \right) = \frac{128}{3}$	1 pont	*$\approx$ 42,67*
Tehát a kitermelt kő térfogata $\frac{128}{3} \cdot 24 = 1024$ (m^3).	1 pont	*1024,08 $\approx$ 1024 (m^3)*
Összesen:	**6 pont**	

Megjegyzés: Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó a határozott integrál értékét számológéppel jól számítja ki.

5. a)		
Egy tízes számrendszerbeli szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A képzett szám biztosan osztható 3-mal, mert a számjegyek összege (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 =) 15.	1 pont	
A képzett szám csak akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegye: 04; 12; 20; 24; 32; 40 vagy 52.	1 pont	
A keresett szám akkor lesz a legkisebb, ha a nagy alaki értékű számjegyek kis helyiértéken állnak.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(Mivel a szám nem kezdődhet 0-val), a legkisebb feltételeknek megfelelő szám a 103 452.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

5. b)		
A {0; 1; 2; 3; 4; 5} halmaznak összesen $2^6 = 64$ db részhalmaza van.	1 pont	
Azok a részhalmazok, amelyek nem tartalmaznak páratlan számot, a {0; 2; 4} halmaz részhalmazai, melyek száma $2^3 = 8$.	1 pont	
A kérdéses részhalmazok száma: $2^6 - 2^3 = 56$.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

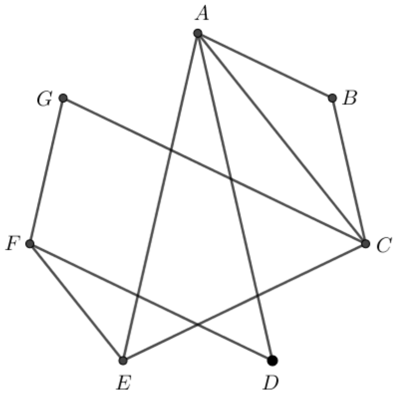
5. c)		
Az ábrázolt függvény két részből áll: egy másodfokú és egy lineáris függvényből.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A felfelé nyíló nem nyújtott parabola talppontja (és egyben a függvény minimuma) a $(-3;-8)$ pont,	1 pont	
így ha $x \in [-5;0]$, akkor $f(x)=(x+3)^2-8$.	1 pont	*Ha* $x \in [-5;0[$, *akkor* $f(x)=(x+3)^2-8$.
A lineáris függvény az *y* tengelyt a $(0;1)$ pontban metszi, meredeksége 1, tehát ha $x \in]0;4]$, akkor $f(x)=x+1$.	1 pont	*Ha* $x \in [0;4]$, *akkor* $f(x)=x+1$.
A függvény hozzárendelési szabálya: $f(x)=\begin{cases}(x+3)^2-8 & ,\text{ha } x\in[-5;0]\\ x+1 & ,\text{ha } x\in]0;4]\end{cases}$	1 pont	$f(x)=\begin{cases}(x+3)^2-8 & ,\text{ha } x\in[-5;0[\\ x+1 & ,\text{ha } x\in[0;4]\end{cases}$
Az *E*-ben húzott érintő meredekségét az *f* deriváltfüggvényének az $x=-1$ helyen felvett helyettesítési értéke adja meg.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
$f'(x)=2x+6$	1 pont	
$f'(-1)=4$	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

6. a)		
Ha $n\to\infty$, akkor n^2+2 is végtelenbe tart.	1 pont	
(Mivel a tört nevezője végtelenbe tart), ezért $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+2}=0$.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

6. b)		
(A sorozat első száz tagját összeadva:) $a_1+a_2+\ldots+a_{100}=(1^2+2)+(2^2+2)+\ldots+(100^2+2)=$	1 pont	
(A jobb oldalon lévő összeg tagjait csoportosítva:) $=(1^2+2^2+\ldots+100^2)+2\cdot 100$	1 pont	
A zárójelben az első 100 db pozitív egész szám négyzetének összege $\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ szerepel,	1 pont	
ezért a sorozat első száz tagjának összege: $\frac{100(100+1)(2\cdot100+1)}{6}+2\cdot100=338\ 550$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

6. c)		
Azt kell megmutatni, hogy a (b_n) sorozat egymást követő tagjainak különbsége állandó.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
(A sorozat képzési szabályába behelyettesítve:) $b_n = a_{n+1} - a_n = \left[(n+1)^2 + 2\right] - \left[(n^2+2)\right] = 2n+1$	1 pont	
$b_n - b_{n-1} = (2n+1) - (2n-2+1) = 2$ (tehát a sorozat valóban számtani)	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

6. d)		
(Teljes indukciót alkalmazunk.) Ha $n=1$, akkor az állítás igaz, mert mindkét képzési szabályból $a_1 = 3$.	1 pont	
Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy *k* pozitív egész számra, azaz létezik olyan *k* szám, amelyre teljesül, hogy $a_{k-1} = (k-1)^2 + 2$.	1 pont	
Ekkor igazolnunk kell, hogy: $a_k = \left(1 + \frac{2k-1}{k^2-2k+3}\right) \cdot a_{k-1} = k^2 + 2$	1 pont	
Az indukciós feltevés miatt: $a_k = \left(1 + \frac{2k-1}{k^2-2k+3}\right) \cdot \left((k-1)^2 + 2\right) =$	1 pont	
$= \left(1 + \frac{2k-1}{k^2-2k+3}\right) \cdot \left(k^2 - 2k + 3\right) =$	1 pont	
$= k^2 - 2k + 3 + 2k - 1 =$	1 pont	
$= k^2 + 2$.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

7. a)		
(A családi ház földszintjének gráfja:) 	2 pont	*Ha a csúcsok azonosítása hiányzik, akkor legfeljebb 1 pont jár.*
A fokszámok összege: $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 20$.	1 pont	*A felrajzolt gráfnak 10 éle van, a fokszámok összege ennek kétszerese, tehát 20.*
Összesen:	**3 pont**	

7. b) első megoldás		
A földszint és a padlás alapterülete is 100 m^2, a pince alapterülete 25 m^2. Ezek összege 225 m^2.	1 pont	
Ha a macska a földszinten van, akkor a valószínűség $\frac{100}{225} \cdot p$, ha a padláson, akkor $\frac{100}{225} \cdot 2p$, ha a pincében, akkor $\frac{25}{225} \cdot \frac{p}{2}$.	3 pont	
A kedvező esetek száma: $\frac{100}{225} \cdot p$.	1 pont	
Az összes eset száma: $\frac{100}{225} \cdot p + \frac{100}{225} \cdot 2p + \frac{25}{225} \cdot \frac{p}{2}$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogy a macska a földszinten van: $P = \frac{\frac{100}{225} \cdot p}{\frac{100}{225} \cdot p + \frac{100}{225} \cdot 2p + \frac{25}{225} \cdot \frac{p}{2}} = 0,32$.	1 pont	
Mivel a *C* jelű szoba alapterülete 25 m^2, a földszint alapterülete 100 m^2, így az ott tartózkodás valószínűsége: $\frac{25}{100} \cdot 0{,}32 = 0{,}08$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

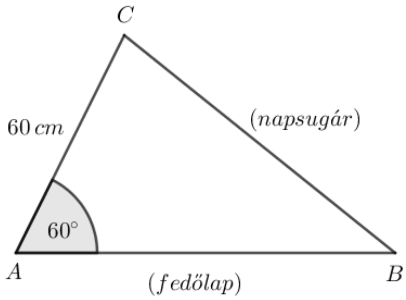
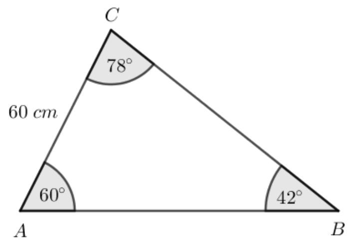
7. b) második megoldás		
Jelölje p annak a valószínűségét, hogy a macska a földszinten tartózkodik. Ez esetben annak a valószínűsége, hogy a padláson van $2p$, annak a valószínűsége, hogy a pincében fekszik $\frac{p}{8}$.	3 pont	
Mivel a macska vagy a pincében, vagy a földszinten vagy a padláson tartózkodik, ezért az egyes helyeken való tartózkodások valószínűségeinek összege biztosan 1.	1 pont	
$\frac{p}{8}+p+2p=1$.	1 pont	
Ebből $p=\frac{8}{25}$.	1 pont	
Mivel a C jelű szoba alapterülete 25 m^2, a földszint alapterülete 100 m^2,	1 pont	
így az ott tartózkodás valószínűsége: $\frac{25}{100}\cdot 0{,}32=0{,}08$.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	

7. c) első megoldás		
Ha arra törekszünk, hogy egy 7 csúcsú teljes gráfból a lehető legkevesebb élt töröljük ki, akkor az úgy teljesülhet, ha csak 2 részgráfra, - amelyek teljes gráfok -, szakítjuk szét az eredeti gráfot.	1 pont	
Ez egy 7 csúcsú teljes gráf esetén háromféleképpen jöhet létre: ha az eredeti gráfot egy 3 és 4 csúcsú teljes gráfra szakítjuk szét, akkor a két gráf éleinek száma összesen 9.	1 pont	
Ha az eredeti gráfot egy 2 és 5 csúcsú teljes gráfra szakítjuk szét, akkor a két gráf éleinek száma összesen 11.	1 pont	
Ha az eredeti gráfot egy 1 és 6 csúcsú teljes gráfra szakítjuk szét, akkor a két gráf éleinek száma összesen 15.	1 pont	
Így az eredeti gráfból legalább 21 – 15 = 6 db élt kell kitörölni, hogy ne legyen összefüggő.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. c) második megoldás		
Ha arra törekszünk, hogy egy 7 csúcsú teljes gráfból a lehető legkevesebb élt töröljük ki, akkor az úgy teljesülhet, ha csak 2 részgráfra, - amelyek teljes gráfok -, szakítjuk szét az eredeti gráfot.	1 pont	
(Jelölje az egyik részgráfban lévő csúcsok számát *x*, ekkor a másik részgráfban $7-x$ csúcs lesz, így az egyes részgráfok éleinek száma:) $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$ és $\frac{(7-x)\cdot(6-x)}{2}$.	1 pont	
(A megmaradó élek száma *x* függvényében:) $e(x)=\frac{x\cdot(x-1)}{2}+\frac{(7-x)\cdot(6-x)}{2}=x^2-7x+21$	1 pont	
Mivel $x\in\{1;2;3;4;5;6\}$, ezért az *e* függvény akkor maximális, ha $x=1$ vagy $x=6$ (azaz ha egyetlen izolált pont keletkezik).	1 pont	
Így az eredeti gráfból legalább 6 db élt kell kitörölni, hogy ne legyen összefüggő.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

7. c) harmadik megoldás		
Ha arra törekszünk, hogy egy 7 csúcsú teljes gráfból a lehető legkevesebb élt töröljük ki, akkor az úgy teljesülhet, ha csak 2 részgráfra, - amelyek teljes gráfok -, szakítjuk szét az eredeti gráfot.	1 pont	
(Jelölje az egyik részgráfban lévő csúcsok számát *x*, ekkor a másik részgráfban $7-x$ csúcs lesz.) Mivel minden csúcs minden csúccsal össze van kötve a teljes gráfban, ezért az *x* csúcsú részgráf mindegyik csúcsából a másik részgráfba vezető mindegyik élt ki kell törölni,	1 pont	
ezért a kitörlendő élek száma *x* függvényében $k(x)=-x^2+7x$	1 pont	
Mivel $x\in\{1;2;3;4;5;6\}$, ezért az *k* függvény akkor minimális, ha $x=1$ vagy $x=6$ (azaz ha egyetlen izolált pont keletkezik).	1 pont	
Így az eredeti gráfból legalább 6 db élt kell kitörölni, hogy ne legyen összefüggő.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

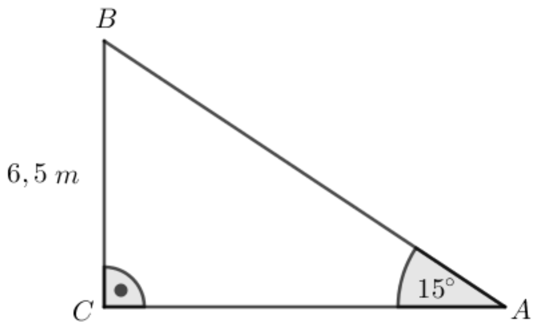
8. a)		
(A napsütéses órák átlaga:) $\bar{x} = \frac{575,2 + 845,7 + 403 + 180,1}{4} =$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel számolva helyesen válaszol.*
= 501 (óra).	1 pont	
(A napsütéses órák szórása:) $\sigma = \sqrt{\frac{(-74,2)^2 + 344,7^2 + (-98)^2 + (-320,9)^2}{4}} \approx$	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó számológéppel számolva helyesen válaszol.*
$\approx 243,36$ (óra).	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

8. b)		
(A feladat megértését tükröző ábra helyes jelölésekkel:) 	1 pont	
Az $ABC\angle = \beta = 42°$,	1 pont	
így a háromszög *C* csúcsánál lévő γ szöge 78°.	1 pont	
(Az *ABC* háromszögben a szinusztétel alapján:) $\frac{\sin 78°}{\sin 42°} = \frac{AB}{60}$,	1 pont	
ahonnan $AB \approx 87,71$ cm.	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

8. c) első megoldás		
A betonnal kiöntésre kerülő test egy négyzet alapú hasáb, melynek alapéle 0,96 m, magassága 0,78 m.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A betonnal kiöntött rész térfogata: $V_b = 0,96 \cdot 0,96 \cdot 0,78 \ (\approx 0,72 \text{ m}^3)$	1 pont	
A talapzat térfogata: $V_t = 1 \cdot 1 \cdot 0,8 \ (= 0,8 \text{ m}^3)$	1 pont	
A talapzatba beépítésre kerülő márvány térfogata: $V_m = V_t - V_b \ \approx 0,08 \text{ m}^3$	1 pont	
Mivel a vásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz, ezért a beépítésre kerülő térfogat a vásárolt mennyiség 90%-a,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért a vásárolt márvány térfogata: $V = \frac{100}{90} \cdot V_m \approx 0,09 \text{ m}^3$	1 pont	
A márványborítás ára kb. 50 000 Ft.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**7 pont**	

8. c) második megoldás		
A márványborítás területét megkapjuk, ha a fedőlap területéhez hozzáadjuk a két-két egyforma oldallap területét.	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
A fedőlap élei 1 méter hosszúak, az egyik oldallap élei 1 m és 0,78 m, a szomszédos oldallap élei 0,96 m és 0,78 m hosszúságúak.	1 pont	
$A = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0,78 + 2 \cdot 0,96 \cdot 0,78 \approx 4,06 \text{ m}^2$.	1 pont	
(A márványlapok térfogata:) $V \approx 4,06 \cdot 0,02 \approx 0,08 \text{ m}^3$.	1 pont	
Mivel a vásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz, ezért a beépítésre kerülő térfogat a vásárolt mennyiség 90%-a,	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha ez a gondolat csak a megoldásból derül ki.*
ezért a vásárolt márvány térfogata: $V = \frac{100}{90} \cdot V_m \approx 0,09 \text{ m}^3$	1 pont	
A márványborítás ára kb. 50 000 Ft.	1 pont	*Ez a pont nem jár, ha a vizsgázó nem kerekít vagy rosszul kerekít.*
Összesen:	**7 pont**	

9. a)		
A medián: 12.	2 pont	*Az adatok monoton sorozattá rendezése esetén 1 pont jár.*
A terjedelem: 11.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

9. b)		
A feladat megértését tükröző ábra (helyes jelölésekkel): 	1 pont	*Ez a pont akkor is jár, ha a vizsgázó ábra nélkül helyesen dolgozik.*
Az *ABC* derékszögű háromszögben: $tg15° = \frac{6,5}{AC}$,	1 pont	
ahonnan $AC = \frac{6,5}{tg15°} \approx 24,26$ m.	1 pont	
Tehát a sebességmérő berendezés 40 m távolságból nem érzékeli a személyautót.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

9. c)		
Jelölje A azt az eseményt, hogy a biztosított ügyfél férfi, B azt, hogy nő, C pedig azt, hogy baleset történik. Ekkor a feladat szövege alapján: $P(A)=0,65$; $P(B)=0,35$ és $P(C)=p$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogyha baleset történik, akkor azt nő okozza: $P(B\|C)=0,31$.	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogyha baleset történik, akkor azt férfi okozza: $P(A\|C)=0,69$.	1 pont	
(A feltételes valószínűség definíciója alapján:) $P(B\|C)=\frac{P(BC)}{P(C)}$ és $P(A\|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}$,	1 pont	
ahonnan $P(BC)=0,31p$ és $P(AC)=0,69p$.	2 pont	
Annak a valószínűsége, hogyha nő vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet: $P(C\|B)=\frac{0,31p}{0,35}\approx 0,89p$,	1 pont	
Annak a valószínűsége, hogyha férfi vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet: $P(C\|A)=\frac{0,69p}{0,65}\approx 1,06p$.	1 pont	
Mivel $P(C\|B)<P(C\|A)$, így a **II.** esemény bekövetkezésének valószínűsége nagyobb.	1 pont	
Összesen:	**9 pont**	