

Név:	
Iskola neve:	
Képzés típusa:	gimnázium / szakgimnázium *

* Kérjük, a megfelelő részt szíveskedjen bekarikázni!



ORSZÁGOS MATEMATIKA PRÓBAÉRETTSÉGI

EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI VIZSGA

12. évfolyam

2019.

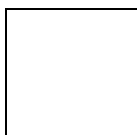
Időtartam: 240 perc

Pótlapok száma	
Tisztázati	
Piszkozati	

Ezt a tételsort az Oktatási Hivatal tételkészítő bizottságától független tételkészítő bizottság készítette.
Az összeállított feladatsor megfelel a jogszabályokban rögzített követelményeknek és a vizsgaleírásnak.

Fontos tudnivalók

1. A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
2. A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
3. A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania. **A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a kitűzött sorrend szerinti legutolsó feladatra nem kap pontot.



4. A feladatok megoldásához szöveges adatok tárolására és megjelenítésére nem alkalmas zsebszámológépet és bármilyen négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
5. **A megoldások gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!**
6. **Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részsámítások is nyomon követhetők legyenek!**
7. A gondolatmenet kifejtése során **a zsebszámológép használata – további matematikai indoklás nélkül – a következő műveletek elvégzésére fogadható el:** összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás, $n!$, $\binom{n}{k}$ kiszámítása, a függvénytáblázatban fellelhető táblázatok helyettesítése (sin, cos, tg, log és ezek inverzei), a π és az e szám közelítő értékének megadása, nullára rendezett másodfokú egyenlet gyökeinek meghatározása. További matematikai indoklás nélkül használhatók a számológépek az átlag és a szórás kiszámítására abban az esetben, ha a feladat szövege kifejezetten nem követeli meg az ezzel kapcsolatos részletsámítások bemutatását is. **Egyéb esetekben a géppel elvégzett számítások indoklás nélküli lépéseknek számítanak, így azokért nem jár pont.**
8. A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasságtétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania, elég csak a tétel megnevezését említenie, de az alkalmazhatóságát röviden indokolnia kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában az alkalmazhatóságát indokolja.

9. A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
10. A dolgozatot tollal írja, de az ábrákat ceruzával is rajzolhatja. Az ábrákon kívül a ceruzával írt részeket a javító tanár nem értékelheti. Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető.
11. Minden feladatnak csak egy megoldása értékelhető. Több megoldási próbálkozás esetén **egyértelműen jelölje**, hogy melyiket tartja érvényesnek!
12. Kérjük, hogy **a szürkített téglalapokba semmit ne írjon!**

I.

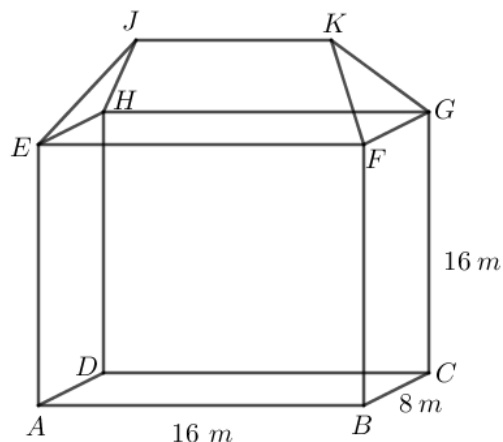
- 1.** a) A 2, 0, 1, 9 számjegyekből az összes lehetséges módon háromjegyű természetes számokat képeztünk. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a képzett számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, annak számjegyei különbözők!
- b) Oldja meg a $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ halmazon a $\sin(x + 2019\pi) = -\frac{1}{2}$ egyenletet!

a)	3 pont	
b)	8 pont	
Ö.:	11 pont	

2. A Regéci Vár egy 1300 körül épült vár, ahol II. Rákóczi Ferenc fejedelem a gyermekkorát töltötte. Az 1. ábrán ennek a várnak a XIV. századi állapota látható, a 2. ábrán pedig egy vázlatos képet láthatunk annak tornyáról.



1. ábra



2. ábra

A torony az $ABCDEFGH$ téglatestből és az $EFGHJK$ tetőből áll. A tornyot alkotó téglatest külső méretei: $AB = 16$ m, $BC = 8$ m és $CG = 16$ m.

- a) Mekkora az oldalfalak térfogata, ha a fal vastagsága 2 m és az összes faltérfogatot az ablakok, ajtók és lőrések 5%-kal csökkentik?

Tudjuk, hogy az $EFGHJK$ tető magassága 5 méter, és az EJH és FKG egyenlő szárú háromszögek síkjai 50° -os szöget zárnak be az $EFGH$ síkkal.

- b) Mekkora a JK szakasz hossza?

A vár 2018-as rekonstrukciója során gimnazisták több napon keresztül segítették a régészek munkáját. A diákok 60%-a ásásban, 30%-a feltárásban, és 45%-a talicskázásban segített. Egyféle munkát 29-en végeztek, pontosan kétféle munkafolyamatban a tanulók $\frac{1}{5}$ része, mindháromban pedig 7,5%-a vett részt.

- c) Hány tanuló vett részt összesen a munkálatokban?

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	3 pont	
Ö.:	12 pont	

- 3. a)** Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

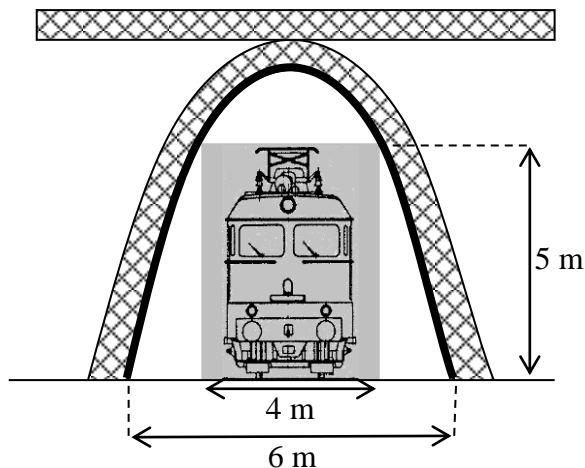
$$\log_2 x \leq \log_{\frac{1}{2}}(4x)$$

- b)** Oldja meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y nemnegatív valós számok!

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 8 \\ \sqrt{xy} = 33 \end{array} \right\}$$

a)	7 pont	
b)	7 pont	
Ö.:	14 pont	

4. A vasúti szaknyelvben űrszelvénynek nevezik a szerelvények akadálytalan áthaladásához szükséges térnek a vágányokra merőleges keresztmetszetét. A nemzetközi szabványok szerint az űrszelvény jellemzően 4 m széles és 5 m magas. Az alakja általában követi a szerelvény alakját, de az egyszerűség kedvéért legyen most az ábrán szürkével jelzett téglalap. A vasút egy olyan híd alatt halad át, amelynek acél tartószerkezete parabolaív alakú. A tartószerkezet belső íve (az ábrán vastag fekete vonallal) a sínek szintjén 6 m széles és éppen nem lóg be az űrszelvénybe.



- a) Milyen magas a híd tartószerkezete a belső ívének középső, legmagasabb pontján?

A vasútvonal áthalad egy olyan 24 méter hosszú, egyenes alagúton is, amelynek keresztmetszete parabolaszélet alakú. A parabolaszéletet a koordináta-rendszerben megadott $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$ egyenletű parabola és az x tengely határolja.

A koordináta-rendszerben 1 egység 1 métert jelent.

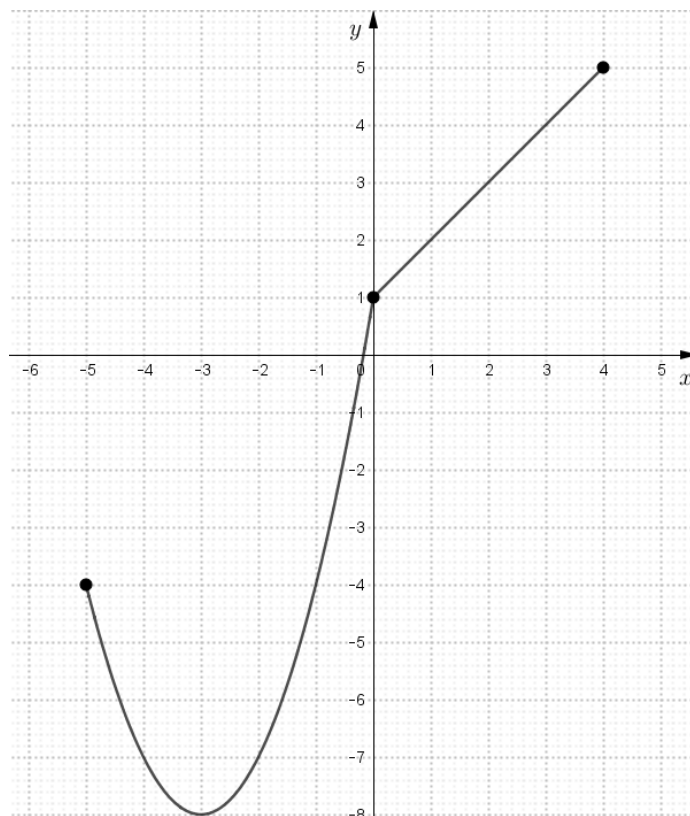
- b) Hány m^3 követ kellett kitermelni az alagút építése közben?
Válaszát egészre kerekítve adja meg!

a)	8 pont	
b)	6 pont	
Ö.:	14 pont	

II.

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 2. oldalon található üres négyzetbe!**

5. a) Határozza meg azt a legkisebb, különböző számjegyekből álló 6-jegyű természetes számot, amely a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből áll és osztható 12-vel!
- b) A $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ halmaznak hány részhalmaza tartalmaz legalább 1 db páratlan számot?
- c) Adja meg az ábrán látható függvény hozzárendelési szabályát, és számítsa ki a függvény $E(-1; -4)$ pontjában húzott érintőjének meredekségét!



a)	5 pont	
b)	3 pont	
c)	8 pont	
Ö.:	16 pont	

**Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!**

6. Tekintsük az $a_n = n^2 + 2$ sorozatot.

- a) Határozza meg a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n}$ határértéket! Válaszát indokolja!
b) Számítsa ki az (a_n) sorozat első száz tagjának összegét!

Az (a_n) sorozat egymást követő tagjai segítségével a $b_n = a_{n+1} - a_n$ sorozatot képeztük.

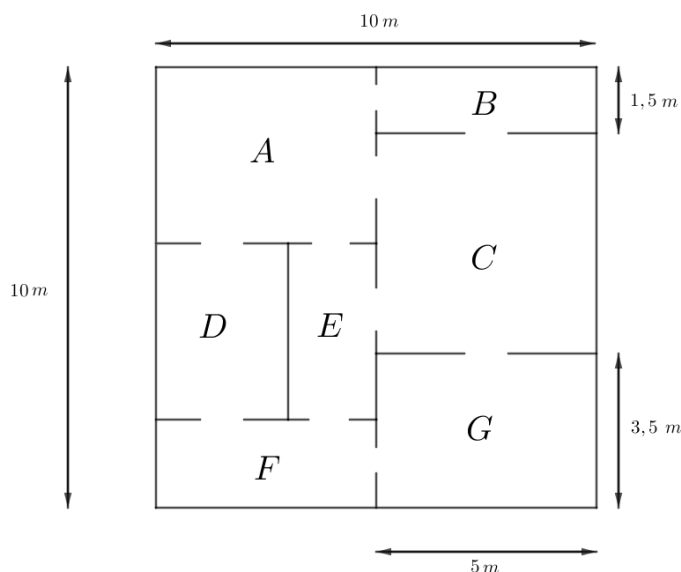
- c) Igazolja, hogy a (b_n) sorozat számtani sorozat!
d) Igazolja teljes indukcióval, hogy az (a_n) sorozat $a_1 = 3$ és $n > 1$ esetén megadható

az $a_n = \left(1 + \frac{2n-1}{n^2 - 2n + 3}\right) \cdot a_{n-1}$ rekurzióval is!

a)	2 pont	
b)	4 pont	
c)	3 pont	
d)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

7. Az ábrán egy családi ház földszintjének alaprajza látható a benne lévő hét helyiséggel és az ajtókkal együtt. A rajzon feltüntettük a földszint és néhány helyiség méretét is. (A földszinti bejárati ajtó nem szerepel az ábrán, mert a megoldáshoz az nem szükséges.)



- a) A házban lévő helyiségeket és az ajtókat egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A, B, C, D, E, F, G) a helyiségeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő helyiség között van ajtó. Rajzolja fel a családi ház földszintjének gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozza meg a felrajzolt gráfban a foksámok összegét!

A lakás fölött a földszinttel megegyező méretű padlás, a ház alapterületének negyede alatt pince is van. A család macskája a pince padlóján fele olyan szívesen, a padláson viszont kétszer olyan szívesen van, mint a földszinten.

- b) Mekkora valószínűséggel fekszik a macska a C jelű szobában?
- c) Legalább hány élt kell kitörölni egy 7 csúcsú teljes gráfból ahhoz, hogy az már ne legyen összefüggő? Igazolja állítását!

a)	3 pont	
b)	8 pont	
c)	5 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

8. Az alábbi táblázat hazánk napsütéses óráinak átlagos mennyiségét mutatja órában mérve az egyes évszakokban.

Tavaszi	Nyári	Őszi	Téli
575,2	845,7	403	180,1

- a) Határozza meg a napsütéses órák mennyiségének átlagát és szórását!

Egy magyar városban található az ábrán látható napóra. A napóra mutatójának hossza 60 cm, amely északi irányba áll és a vízszintes talapzattal 60° -os szöget zár be. A tavaszi nap-éj egyenlőség idején (2018. március 20-án) a Nap delelési magassága 42° volt. A Nap delelési magasságán a Nap irányába mutató félegyenesnek a vízszintessel bezárt szögét értjük.



- b) Milyen hosszú volt ekkor a napóra mutatójának árnyéka a vízszintes alaplapon?

A napóra felületének koszolódását úgy szeretnék csökkenteni, hogy talapzatra helyezik a napórát. A talapzat egy olyan téglatest alakú betontömb, amelynek fedőlapját és oldallapjait 2 cm vastag márványlappal borítják be. A márvánnyal beborított betontömb alaplappja 1 m oldalhosszúságú négyzet, magassága 80 cm. A márványbevonat készítése közben a megvásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz.

- c) Mennyibe kerül a betontömb beborításához szükséges márvány, ha 1 m^3 2 cm vastag márványlap ára 540 000 Ft? Válaszát **tízezer** forintra kerekítve adja meg!

a)	4 pont	
b)	5 pont	
c)	7 pont	
Ö.:	16 pont	

Az 5-9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania. A kihagyott feladat sorszámát írja be a 3. oldalon található üres négyzetbe!

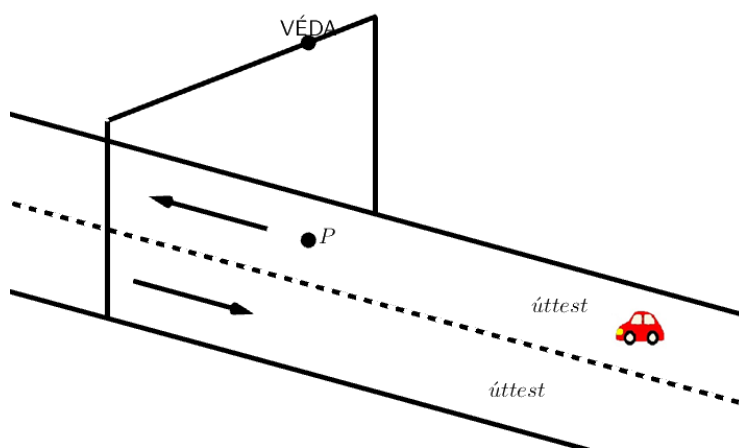
9. Az alábbi táblázatban a gyorsajtás miatt bekövetkezett halálos közúti balesetek száma látható a Nyugat-Dunántúlon 2010-től 2018-ig a megadott időszakban.

Halálos közúti balesetek száma 2010-től 2018-ig 01.01-től 02.28-ig (Nyugat-Dunántúl)

Év	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Balesetek száma	9	8	12	7	18	14	15	12	8

- a) Határozza meg a balesetek számának mediánját és terjedelmét!

Hazánkban a rendőrség rendszám tábla alapján azonosítja a gyorsajtókat. Egy sebességmérő alkalmazásával az úttesten szabályosan közlekedő autós éppen szembe van a mérést végző készülékkel, amit VÉDÁ-nak hívnak. A 6,5 m magas állványra szerelt sebességmérő berendezésből 15°-os lehajlási szögben érkezik az úttestre a lézernyaláb.



(A lézernyaláb szélességétől az egyszerűség kedvéért most tekintsünk el.)

- b) Érzékeli-e a sebességmérő berendezés az ebben a pillanatban a P ponttól 40 m távolságban az úttest közepén a VÉDÁ irányába közlekedő személyautót?

Egy biztosító honlapján a következőket olvashatjuk:

„Az autóbiztosítással rendelkező ügyfeleink 65 százalékát férfiak, 35 százalékát nők teszik ki. Balesetek szempontjából a férfiak a károkozók 69 százalékát teszik ki. Úgy tűnik, a hölgyek biztonságosabban vezetnek, ugyanis a károkozók körében csak 31 százalékos az arányuk.”

- c) Vizsgálja meg, hogy (a leírtak alapján) az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége!
I. Ha hölgy vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.
II. Ha férfi vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.

a)	3 pont	
b)	4 pont	
c)	9 pont	
Ö.:	16 pont	

	a feladat sorszáma	pontszám			
		maximális	elért	maximális	elért
I. rész	1.	11		51	
	2.	12			
	3.	14			
	4.	14			
II. rész		16		64	
		16			
		16			
		16			
		← nem választott feladat			
Az írásbeli vizsgarész pontszáma			115		